

**Entwicklung eines  
plattformunabhängigen  
Fuzzy-Modellierungssystems  
mit  
graphischer Benutzeroberfläche**

Diplomarbeit

vorgelegt von

Heiko Förster

betreut von

Dr. A. Salski

Prof. Dr. P. Kandzia

Oktober 1998

Institut für Informatik und Praktische Mathematik

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Fürs Internet auf den theoretischen Teil beschränkt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Ziel der Diplomarbeit . . . . .	7
1.2	Struktur der Diplomarbeit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Fuzzy-Mengen-Theorie</b>	<b>11</b>
2.1	Grundlagen der Fuzzy-Mengen-Theorie . . . . .	11
2.1.1	Motivation der Fuzzy-Mengen . . . . .	11
2.1.2	Fuzzy-Mengen . . . . .	12
2.1.3	Operatoren von Fuzzy-Mengen . . . . .	13
2.1.4	FUZZY-Operatoren . . . . .	15
2.2	Linguistische Variablen . . . . .	19
2.2.1	Definitionen . . . . .	19
2.2.2	Defuzzifikation . . . . .	20
2.2.3	Linguistische Approximation . . . . .	21
2.3	Fuzzy-Logik . . . . .	33
2.4	Approximatives Schließen . . . . .	36
2.4.1	Motivation und Definition . . . . .	36
2.4.2	Vergleich der Inferenzmethoden . . . . .	38
2.4.3	Zusammenwirken mehrerer Regeln . . . . .	48
	<b>Literatur</b>	<b>57</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Ziel der Diplomarbeit

Die vorliegende Diplomarbeit entstand im Rahmen des Projektes *Ökosystemforschung im Bereich der Bornhöveder Seenkette*.

Das Projektzentrum *Ökosystemforschung im Bereich der Bornhöveder Seenkette* ist im Jahr 1988 zur langfristigen interdisziplinären Ökosystemforschung und angewandtökologischen Forschung durch die Bundesregierung (Bundesministerium für Forschung und Technologie), die Landesregierung Schleswig-Holsteins (Ministerium für Forschung, Wissenschaft und Kultur sowie Ministerium für Natur, Umwelt und Landesentwicklung) und die Christian-Albrechts-Universität zu Kiel geschaffen worden. Die Bornhöveder Seenkette ist ein für Norddeutschland repräsentativer Landschaftsraum mit verschiedenartiger landwirtschaftlicher, forstwirtschaftlicher und fischereiwirtschaftlicher Nutzung auf engem Raum. Aus dem Projektzentrum ist im Jahre 1996 das Ökologie-Zentrum als neue, landeseigene Institution (Gemeinsame Einrichtung der Agrarwissenschaftlichen, der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen und der Medizinischen Fakultät der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel) hervorgegangen. Das Projektzentrum *Ökosystemforschung im Bereich der Bornhöveder Seenkette* ist nunmehr eins neben weiteren Forschungsvorhaben im Ökologie-Zentrum.

Für zahlreiche ökologische Prozesse liegen keine analytischen Modelle vor, da das Wissen in einigen Bereichen noch lückenhaft ist, oder genaue Werte der Parameter nicht meßbar oder nur unter unverhältnismäßig großem Aufwand zu ermitteln sind. In diesen Fällen können konventionelle Modellierungsmethoden wie Differentialgleichungssysteme nicht eingesetzt werden, da sie eine exakte, mathematisch formale Spezifikation erfordern oder die Unsicherheitsaspekte von ökologischen Daten nicht berücksichtigen können. Jedoch können in solchen Fällen häufig natürlichsprachliche Formulierung-

gen zur Darstellung der Expertenkenntnisse verwendet werden, die unpräzise und unscharf sind. Diese Formulierungen können als „fuzzy“ Wissensbasen in Form von Regeln der Art WENN.DANN. mit linguistischen Ausdrücken formuliert werden. Zur Auswertung dieser Fuzzy-Wissensbasen werden auf der Fuzzy-Logik basierende Inferenzmethoden verwendet, die die Simulationsergebnisse für sowohl quantitative als auch qualitative Eingabedaten liefern (Zadeh, 1975; Zimmermann, 1992).

In der zur Zeit dritten und voraussichtlich letzten Förderungsphase des Projektes sollen unter anderem rechnergestützte Modelle für ökologische Prozesse entwickelt werden. Um den Aufbau von fuzzy-wissensbasierten Modellen zu erleichtern, soll nach der Teilvorhabenbeschreibung des Projektzentrums vom Februar 1996 (Forschungskonzept, 1996), das in der vorherigen Förderungsphase im Rahmen von Diplomarbeiten (Schepers, 1991; Bui, 1993; Nöhr, 1995; Neubert, 1995) entwickelte System **FLEco** (modelling support system based on **F**uzzy **L**ogic for **E**cological application) von der Rechenanlage VAX-3400 des Rechenzentrums auf Unix-Plattform portiert werden. Zusätzlich war geplant, FLEco mit einer zeitgemäßen, benutzerfreundlichen graphischen Oberfläche zu versehen um die Akzeptanz des Systems zu erhöhen.

Der Portierung wurde eine komplette Neuprogrammierung vorgezogen, da der größte Teil des Programms – die Benutzerschnittstelle – neu programmiert werden mußte. Das Programm konnte so in einer objektorientierten und damit erweiterungsfreundlichen Programmiersprache realisiert werden. Mit Java wurde eine Programmiersprache gewählt, die es erlaubt, das Programm auf nahezu allen Plattformen laufen zu lassen.

Das im Rahmen dieser Diplomarbeit entstandene Modellierungssystem xFLEco 1.0 enthält die Möglichkeit der Definition und Ein- und Ausgabe von linguistischen, numerischen und symbolischen Variablen, sowie der Definition und Auswertung von Regeln mit einer graphischen interaktiven Benutzeroberfläche. xFLEco 1.0 dient als Grundlage einer Fuzzy-Expertensystem-Shell. Diese Shell wird derzeit in einer Studien- und anschließenden Diplomarbeit von Christian Lemster entwickelt.

## 1.2 Struktur der Diplomarbeit

Die vorliegende Arbeit ist in zwei Teile gegliedert.

**Kapitel 2** enthält den theoretischen Teil. Hier werden die Fuzzy-Mengen (Kapitel 2.1) und die linguistischen Variablen (Kapitel 2.2) sowie deren Operationen, die Approximationsmethoden (Kapitel 2.2.3) und die Inferenzmethoden (Kapitel 2.3) definiert. Es wird außerdem bewiesen,

daß eine vom Autor vorgeschlagene Approximationsmethode eine Metrik ist (Kapitel 2.2.3). Der Vergleich von zehn Inferenzmethoden findet nicht wie in der im Literaturverzeichnis erwähnten Literatur mit einem Crisp-Wert statt, sondern mit echten Fuzzy-Mengen (Kapitel 2.4).

**Kapitel 3** beschreibt den praktischen Teil der Arbeit. Hier werden zunächst spezielle Eigenschaften der objektorientierten Programmierung (Kapitel ??) und die Programmiersprache Java (Kapitel ??) vorgestellt. Anschließend werden die wichtigsten Klassen und die Kommunikation unter den Objekten von xFLEco 1.0 beschrieben (Kapitel ??). Das Kapitel 3 schließt mit einem Vergleich der Programme FLEco und xFLEco 1.0 (Kapitel ??).

Im **Anhang** befindet sich das Manual zu dem entwickelten Modellierungssystem xFLEco 1.0. Es hat eine eigene Numerierung der Seiten und enthält ein eigenes Inhaltsverzeichnis, kann also separat benutzt werden.





# Kapitel 2

## Fuzzy-Mengen-Theorie

### 2.1 Grundlagen der Fuzzy-Mengen-Theorie

Die Fuzzy-Mengen-Theorie wurde 1965 von dem Systemanalytiker *L. A. Zadeh* begründet (Zadeh, 1965) und wurde bis heute unter anderem von *H.-J. Zimmermann* weiter entwickelt, der auch seit der ersten Ausgabe 1978 Chefredaktor der Zeitschrift *Fuzzy sets and systems* ist.

Die Fuzzy-Mengen-Theorie wird in dieser Diplomarbeit soweit dargestellt, wie sie im Programm xFLEco 1.0 implementiert ist. Weiterführende Literatur ist im Literaturverzeichnis zu finden.

#### 2.1.1 Motivation der Fuzzy-Mengen

In der Zweiwertigen-Logik ist die Zugehörigkeit eines Objektes oder eines Zustandes (im Folgenden nur noch Objekt) zu einer Menge eindeutig. Entweder gehört ein Objekt zu einer Menge oder es gehört nicht dazu. Gehört ein Objekt zu einer Menge, wird der Grad der Zugehörigkeit dieses Objektes zu der Menge oft mit wahr, ja oder 1 bezeichnet. Gehört ein Objekt nicht zu einer Menge wird dieser Grad der Zugehörigkeit dann mit falsch, nein oder 0 bezeichnet.

Sollen jedoch in einer Kommunikation zwischen Menschen Objekte linguistischen Ausdrücken zugeordnet werden, kann diese Zugehörigkeit auch uneindeutig sein, da linguistische Ausdrücke oft nicht klar definiert sind.

**Beispiel 2.1.1** Eine Menge von farbigen Gegenständen soll den Farben *Gelb*, *Orange* oder *Rot* zugeordnet werden. Dabei wird es sicherlich Gegenstände geben, die von verschiedenen Menschen oder von einem Menschen zu verschiedenen Zeiten immer genau einer Farbe zugeordnet werden. Die Zuordnung dieser Gegenstände ist dann eindeutig.

Andere Gegenstände werden jedoch von verschiedenen Personen oder einer Person zu verschiedenen Zeiten verschiedenen Farben zugeordnet. Somit ist die Zuordnung dieser Gegenstände nicht eindeutig.

Eine Lösung bietet die Fuzzy-Logik (Logik der unscharfen Mengen). Objekte müssen damit nicht mehr eindeutig zu einer Menge oder nicht zu dieser Menge zugeordnet werden.

Der Grad der Zugehörigkeit wird in der Fuzzy-Logik in der Regel mit einer Zahl aus dem Intervall von 0 bis 1 angegeben.

### 2.1.2 Fuzzy-Mengen

**Fuzzy-Menge,  
Zugehörig-  
keitsfunktion**

**Definition 2.1.2** Sei  $X$  eine Menge. Eine Fuzzy-Menge (unscharfe Menge)  $A$  über  $X$  ist eine Menge von geordneten Paaren mit

$$A = \left\{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1] \right\} .$$

Für  $x \in X$  wird  $\mu_A(x)$  als Grad der Zugehörigkeit von  $x$  in  $A$  bezeichnet. Die Funktion

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_A(x)$$

heißt Zugehörigkeitsfunktion von  $A$ .

**Crisp-Menge**

**Definition 2.1.3** Sei  $X$  eine Menge und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ . Die Fuzzy-Menge  $A$  wird auch Crisp-Menge (scharfe Menge) über  $X$  genannt, wenn

$$\forall x \in X \quad \mu_A(x) \in \{0, 1\} .$$

**Singleton**

**Definition 2.1.4** Sei  $X$  eine Menge,  $A$  eine Crisp-Menge über  $X$  und  $x_1 \in X$ . Die Crisp-Menge  $A$  wird auch Singleton  $x_1$  über  $X$  genannt, wenn

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x = x_1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

ist (Mizumoto, 1988).

**Träger**

**Definition 2.1.5** Sei  $X$  eine Menge und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ . Der Träger der Fuzzy-Menge  $A$  ist definiert durch

$$\text{supp}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\} .$$

**Definition 2.1.6** Sei  $X$  eine nicht leere Menge und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ . Dann wird  $\text{hgt}(A)$  mit

$$\text{hgt}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

als die Höhe der Fuzzy-Menge  $A$  bezeichnet.

**Höhe**

**Definition 2.1.7** Sei  $X$  eine Menge und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ . Dann heißt  $\text{card}(A)$  mit

$$\text{card}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

die Kardinalität der Fuzzy-Menge  $A$ .

**Kardinalität**

**Bemerkung 2.1.8** Die Definition 2.1.7 eignet sich jedoch nicht, wenn  $X$  ein Intervall aus  $\mathbb{R}$  ist, da dann in der Regel  $\text{card}(A) = \infty$  ist.

**Definition 2.1.9** Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $A$  eine Fuzzy-Menge über dem Intervall  $I$ . Ist die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_A$  von  $A$  im Intervall  $I$  integrierbar, so wird die Kardinalität der Fuzzy-Menge  $A$  über  $I$   $\text{card}(A)$  mit

$$\text{card}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_I \mu_A(x) dx$$

angegeben.

**Kardinalität  
für  
Fuzzy-Mengen  
über  
Intervallen**

### 2.1.3 Operatoren von Fuzzy-Mengen

Es folgen zunächst die Mengenoperatoren Durchschnitt, Vereinigung und Komplement, wie sie von L. A. Zadeh auf Fuzzy-Mengen übertragen wurden (Zadeh, 1965).

**Definition 2.1.10** Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Der Durchschnitt  $A \cap B$  ist definiert durch

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, \mu_{A \cap B}(x)) \mid (x, \mu_A(x)) \in A, (x, \mu_B(x)) \in B \right\}$$

mit

$$\mu_{A \cap B}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} .$$

**Durchschnitt**

**Definition 2.1.11** Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Die Vereinigung  $A \cup B$  ist definiert durch

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, \mu_{A \cup B}(x)) \mid (x, \mu_A(x)) \in A, (x, \mu_B(x)) \in B \right\}$$

mit

$$\mu_{A \cup B}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} .$$

**Vereinigung**

**Komplement**    **Definition 2.1.12** Sei  $X$  eine Menge und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ . Das Komplement  $\bar{A}$  ist definiert durch

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, \mu_{\bar{A}}(x)) \mid (x, \mu_A(x)) \in A \right\}$$

mit

$$\mu_{\bar{A}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mu_A(x) .$$

Für die Bemerkung 2.1.15 brauchen wir noch zwei Definitionen.

**Definition 2.1.13** Seien  $X, Y$  Mengen mit  $Y \subseteq X$ . Dann sei  $\mathbb{1}_X^Y$  eine Crisp-Menge über  $X$  definiert durch

$$\mathbb{1}_X^Y \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, \mu_{\mathbb{1}_X^Y}(x)) \mid x \in X \right\}$$

mit

$$\mu_{\mathbb{1}_X^Y}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & , x \in Y \\ 0 & , \text{sonst} . \end{cases}$$

**Teilmenge**    **Definition 2.1.14** Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Dann gilt:

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in X \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x) .$$

**t-Norm,  
t-Conorm**

**Bemerkung 2.1.15** Die Definition 2.1.10 des Durchschnitts genügt der  $t$ -Norm und die Definition 2.1.11 der Vereinigung der  $t$ -Conorm (Kruse et al., 1995), d. h. für eine Menge  $X$  und Fuzzy-Mengen  $A, B$  und  $C$  über  $X$  gilt (Kruse et al., 1995):

$$\begin{aligned} A \cap \mathbb{1}_X^X &= A && \text{(Einselement)} \\ A \cup \mathbb{1}_X^\emptyset &= A && \text{(Nullelement)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\implies A \cap C \subseteq B \cap C && \text{(Monotonie)} \\ A \subseteq B &\implies A \cup C \subseteq B \cup C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A && \text{(Kommutativität)} \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C && \text{(Assoziativität)} \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.1.16** Da die Definition 2.1.10 des Durchschnitts der  $t$ -Norm und die Definition 2.1.11 der Vereinigung der  $t$ -Conorm genügen, gelten auch die DeMorganschen Gesetze (Kruse et al., 1995):

Mit  $X$  sei eine Menge und  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$  gilt:

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}.\end{aligned}$$

Für die Definitionen des Durchschnitts und der Vereinigung gibt es noch andere Möglichkeiten, die die  $t$ -Norm bzw. die  $t$ -Conorm erfüllen (Kruse et al., 1995).

**Bemerkung 2.1.17** Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  und  $C$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C).\end{aligned}$$

**Bemerkung 2.1.18** Die Definition 2.1.10 des Durchschnitts durch die Minimumbildung und die Definition 2.1.11 der Vereinigung durch die Maximumbildung der Zugehörigkeitsfunktionen ist das einzige Paar distributiver und damit absorbierender und idempotenter  $t$ -Norm und  $t$ -Conorm, ist also das einzige Paar mit den Eigenschaften  $A \cap A = A$  und  $A \cup A = A$  für Fuzzy-Mengen  $A$  (Kruse et al., 1995).

**Bemerkung 2.1.19** Sei  $X$  eine Menge und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ . Es gibt keinen Komplementoperator  $\bar{\phantom{x}}$  für den  $A \cap \bar{A} = \mathbb{1}_X^0$  und  $A \cup \bar{A} = \mathbb{1}_X^X$  stets erfüllt ist (Kruse et al., 1995).

**Definition 2.1.20** Seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Eine Fuzzy-Menge  $R$  über  $X \times Y$  bezeichnet man als Fuzzy-Relation. Für  $(x, y) \in X \times Y$  bezeichnet man den Grad der Zugehörigkeit  $\mu_R((x, y))$  als den Grad des Zutreffens von  $(x, y)$  in  $R$ . Für  $\mu_R((x, y))$  schreiben wir kurz  $\mu_R(x, y)$ .

## 2.1.4 FUZZY-Operatoren

**Definition 2.1.21** Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Das FUZZY-AND FUZZY-AND  $A \cap_{[\gamma]} B$  mit Parameter  $\gamma \in [0, 1]$  ist definiert durch

$$A \cap_{[\gamma]} B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, \mu_{A \cap_{[\gamma]} B}(x)) \mid x \in X \right\}$$

mit

$$\mu_{A \cap_{[\gamma]} B}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - \gamma) \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{2}.$$

**Bemerkung 2.1.22** Das FUZZY-AND bildet eine Fuzzy-Menge, die als Zugehörigkeitsfunktion mit  $\gamma = 1$  das punktweise Minimum ( $A \cap_{[1]} B = A \cap B$ ) und mit  $\gamma = 0$  den punktweisen arithmetischen Mittelwert der Zugehörigkeitsfunktionen der ursprünglichen Fuzzy-Mengen hat.

**FUZZY-OR**

**Definition 2.1.23** Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Das FUZZY-OR  $A \cup_{[\gamma]} B$  mit Parameter  $\gamma \in [0, 1]$  ist definiert durch

$$A \cup_{[\gamma]} B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, \mu_{A \cup_{[\gamma]} B}(x)) \mid x \in X \right\}$$

mit

$$\mu_{A \cup_{[\gamma]} B}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - \gamma) \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{2} .$$

**Bemerkung 2.1.24** Das FUZZY-OR bildet eine Fuzzy-Menge mit einer Zugehörigkeitsfunktion, die mit  $\gamma = 0$  den punktweisen arithmetischen Mittelwert ( $A \cup_{[0]} B = A \cap_{[0]} B$ ) und mit  $\gamma = 1$  das punktweise Maximum ( $A \cup_{[1]} B = A \cup B$ ) der Zugehörigkeitsfunktion der ursprünglichen Fuzzy-Mengen bildet.

Da die beiden Operatoren FUZZY-AND und FUZZY-OR mit  $\gamma = 0$  das gleiche Ergebnis liefern, bietet es sich an, diese Operatoren zusammen zu fassen.

**GAMMA Operator**

**Definition 2.1.25** Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Das GAMMA  $A \circ_{[\gamma]} B$  mit Parameter  $\gamma \in [0, 1]$  ist definiert durch

$$A \circ_{[\gamma]} B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, \mu_{A \circ_{[\gamma]} B}(x)) \mid x \in X \right\}$$

mit

$$\mu_{A \circ_{[\gamma]} B}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - \gamma) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} .$$

Auch hier gibt es weitere Möglichkeiten der Definition (Zimmermann, 1992). Diese Definition ist jedoch wie FUZZY-AND und FUZZY-OR linear bezüglich  $\gamma$  und es gilt der folgende Satz.

**Monotonie des Parameters**

**Satz 2.1.26** Sei  $X$  eine Menge,  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$  und seien  $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$ . Dann gilt:

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \implies A \circ_{[\gamma_1]} B \subseteq A \circ_{[\gamma_2]} B .$$

**Beweis 2.1.27** Sei  $X$  eine Menge, seien  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$  und  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_\Delta \in [0, 1]$ . Sei  $\gamma_1 + \gamma_\Delta = \gamma_2$ . Aus  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  folgt für jedes  $x \in X$ :

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - \gamma_1) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
\leq & \gamma_1 \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + \gamma_\Delta \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
& \quad + (1 - \gamma_1) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} - \gamma_\Delta \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
= & (\gamma_1 + \gamma_\Delta) \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + ((1 - \gamma_1) - \gamma_\Delta) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
= & \gamma_2 \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - \gamma_2) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} .
\end{aligned}$$

Mit der Definition 2.1.14 folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.1.28** Für alle  $\gamma \in [0, 1]$  gilt:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \cap_{[\gamma]} \equiv \circlearrowleft_{[0, 5 - \gamma/2]} , \\
(ii) \quad & \cup_{[\gamma]} \equiv \circlearrowright_{[0, 5 + \gamma/2]} .
\end{aligned}$$

**Beweis 2.1.29** Sei  $X$  eine Menge und seien  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$ .

Mit  $x \in X$  und  $\gamma \in [0, 1]$  gilt:

(i):

$$\begin{aligned}
& \gamma \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - \gamma) \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{2} \\
= & \gamma \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - \gamma) \frac{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}}{2} \\
= & \gamma \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
& \quad + (0, 5 - \gamma/2) \left( \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \right) \\
= & \gamma \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
& \quad + (0, 5 - \gamma/2) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (0, 5 - \gamma/2) \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
= & (\gamma + 0, 5 - \gamma/2) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (0, 5 - \gamma/2) \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
= & (0, 5 + \gamma/2) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - (0, 5 + \gamma/2)) \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} .
\end{aligned}$$

(ii): analog zu (i).  $\square$

**Bemerkung 2.1.30** Für je zwei Fuzzy-Mengen  $A$  und  $B$  über eine Menge  $X$  gilt:

$$\begin{aligned}
A \cup B &= A \cup_{[1]} B &= A \circlearrowright_{[1]} B \\
& A \cup_{[0,5]} B &= A \circlearrowright_{[0,75]} B \\
& A \cup_{[0]} B &= A \circlearrowright_{[0,5]} B &= A \cap_{[0]} B \\
& & A \circlearrowright_{[0,25]} B &= A \cap_{[0,5]} B \\
& & A \circlearrowright_{[0]} B &= A \cap_{[1]} B &= A \cap B .
\end{aligned}$$

Die Definition 2.1.25 von GAMMA genügt nicht der t-Norm bzw. nicht der t-Conorm, jedoch gilt der folgende Satz.

**Monotonie,  
Kommutativität**

**Satz 2.1.31** Sei  $X$  eine Menge,  $A$ ,  $B$  und  $C$  Fuzzy-Mengen über  $X$  und  $\gamma \in [0, 1]$ . Dann gilt:

$$(i) \quad A \subseteq B \implies A \circlearrowleft_{[\gamma]} C \subseteq B \circlearrowleft_{[\gamma]} C \quad (\text{Monotonie}) ,$$

$$(ii) \quad A \circlearrowleft_{[\gamma]} B = B \circlearrowleft_{[\gamma]} A \quad (\text{Kommutativität}) .$$

**Beweis 2.1.32** Sei  $X$  eine Menge und seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Aus  $\gamma \in [0, 1]$  und  $x \in X$  folgt:

(i): Sei  $A \subseteq B$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} & \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \\ \implies & \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} \leq \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}, \\ & \min\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} \leq \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} \\ \implies & \gamma \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} \leq \gamma \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}, \\ & (1 - \gamma) \min\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} \leq (1 - \gamma) \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} \\ \implies & \gamma \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} + (1 - \gamma) \min\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} \\ & \leq \gamma \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} + (1 - \gamma) \min\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} . \end{aligned}$$

Mit der Definition 2.1.14 folgt die Behauptung.

(ii):

$$\begin{aligned} & \gamma \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - \gamma) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\ = & \gamma \max\{\mu_B(x), \mu_A(x)\} + (1 - \gamma) \min\{\mu_B(x), \mu_A(x)\} . \end{aligned}$$

Mit der Definition 2.1.14 folgt die Behauptung. □

**DeMorgan-  
sches  
Gesetz**

**Satz 2.1.33** Sei  $X$  eine Menge und  $A$ ,  $B$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Für  $\gamma \in [0, 1]$  gilt:

$$\overline{A \circlearrowleft_{[\gamma]} B} = \overline{A} \circlearrowleft_{[1-\gamma]} \overline{B} .$$



**Beweis 2.1.34** Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  Fuzzy-Mengen über  $X$ . Sei  $\gamma \in [0, 1]$  und  $x \in X$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}
& 1 - \left( \gamma \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} + (1 - \gamma) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \right) \\
&= 1 - \gamma \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} - (1 - \gamma) \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
&= 1 - \gamma \left( 1 - \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \right) \\
&\quad - (1 - \gamma) \left( 1 - \max\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \right) \\
&= 1 - \gamma + \gamma \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \\
&\quad - (1 - \gamma) + (1 - \gamma) \max\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \\
&= (1 - \gamma) \max\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \\
&\quad + (1 - (1 - \gamma)) \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} .
\end{aligned}$$

Somit ist für jedes  $x \in X$ :

$$\mu_{\overline{A \circ_{[\gamma]} B}}(x) = \mu_{\overline{A} \circ_{[1-\gamma]} \overline{B}}(x) .$$

□

## 2.2 Linguistische Variablen

### 2.2.1 Definitionen

**Definition 2.2.1** Ein linguistischer Ausdruck ist ein Paar  $(A_N, A)$  mit „Namen“  $A_N$  und einer Fuzzy-Menge  $A$ .

**Linguistischer  
Ausdruck**

Zur Vereinfachung schreiben wir die folgende Definition.

**Definition 2.2.2** Sei  $Y$  eine Menge. Dann ist  $\Pi(Y)$  die Menge aller Fuzzy-Mengen über  $Y$  und heißt Fuzzy-Potenzmenge über  $Y$ .

**Fuzzy-  
Potenzmenge**

**Definition 2.2.3** Eine linguistische Variable  $U = (U_N, X, \mathcal{L})$  ist ein Tripel mit „Namen“  $U_N$ , einer Menge  $X$  und einer nicht leeren Menge  $\mathcal{L}$  mit linguistischen Ausdrücken. Für alle linguistischen Ausdrücke  $(A_N, A) \in \mathcal{L}$  ist  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$  und  $A_N$  ein eindeutiger Name, so daß für alle  $(A_N, A), (B_N, B) \in \mathcal{L}$  aus  $A_N = B_N$  auch  $A = B$  folgt. Die linguistische Variable sei außerdem „assoziiert mit einer Basisvariablen  $U^{\Pi(X)}$ “ (Zimmermann, 1992). Die Basisvariable  $U^{\Pi(X)}$  stellt den Speicherplatz für eine beliebige Fuzzy-Menge  $\tilde{U}$  über  $X$  bereit.

**Linguistische  
Variable**

Die Fuzzy-Menge  $\tilde{U}$  wird hier, erweitert mit der Tilde, mit dem Buchstaben der linguistischen Variablen bezeichnet, um eine leichtere Zuordnung zu ermöglichen. Alle anderen Fuzzy-Mengen werden weiterhin mit  $A, B, \dots$  bezeichnet.

**Beispiel 2.2.4** Sei  $U = (\text{Farbe}, [570, 800], \{(Gelb, g), (Orange, o), (Rot, r)\})$  eine linguistische Variable. So hat die linguistische Variable  $U$  den Namen *Farbe* und enthält die linguistischen Ausdrücke mit den Namen *Gelb*, *Orange* und *Rot*. Weiterhin sind  $g, o$  und  $r$  Fuzzy-Mengen über dem Intervall  $[570, 800]$  (der Wellenlänge des Lichtes mit der Einheit nm für Nano-Meter: gelb = 575 nm – 580 nm, orange = 585 nm – 595 nm, rot = 620 nm – 780 nm (Benz et al., 1980)). Zu der linguistischen Variable  $U$  sei eine Basisvariable  $U^{\Pi([570, 800])}$  assoziiert. Diese Basisvariable  $U^{\Pi([570, 800])}$  enthält eine beliebige Fuzzy-Mengen  $\tilde{U}$  über  $[570, 800]$ .

Enthält die zu einer linguistischen Variablen  $U = (., X, \mathcal{L})$  assoziierte Basisvariable  $U^{\Pi(X)}$  ein Ergebnis, so muß die Fuzzy-Menge  $\tilde{U}$  interpretiert werden. Zur leichteren Interpretation kann die Fuzzy-Menge defuzzifiziert oder approximiert werden. Die Defuzzifikation (Kapitel 2.2.2) liefert einen numerischen Repräsentanten der Fuzzy-Menge  $\tilde{U}$ , und die linguistische Approximation (Kapitel 2.2.3) liefert zu der Fuzzy-Menge  $\tilde{U}$  einen linguistischen Ausdruck aus der Menge der linguistischen Ausdrücke  $\mathcal{L}$  von der linguistischen Variable  $U$ .

## 2.2.2 Defuzzifikation

Mit der Defuzzifikation wird einer Fuzzy-Menge ein repräsentativer numerischer Wert zugeordnet. In einem wissensbasierten Modellierungssystem mit Fuzzy-Mengen über Intervallen wird häufig die Flächenschwerpunktmethode verwendet.

### Flächen- schwerpunkt

**Definition 2.2.5** Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und sei  $U = (., I, .)$  eine linguistische Variable. Ist  $\mu_{\tilde{U}}$  im Intervall  $I$  integrierbar und ist  $\int_I \mu_{\tilde{U}}(x) dx > 0$ , so liegt das Lot des Flächenschwerpunktes der Fuzzy-Menge  $\tilde{U}$  auf die Abszisse bei dem Wert

$$\text{Center}(\tilde{U}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_I x \mu_{\tilde{U}}(x) dx}{\int_I \mu_{\tilde{U}}(x) dx} .$$

Der Wert  $\text{Center}(\tilde{U})$  wird als numerischer Repräsentant der Fuzzy-Menge  $\tilde{U}$  genommen.

Weitere Defuzzifikationsmethoden werden u. a. in *Fuzzy-Systeme* (Kruse et al., 1995) beschrieben.

### 2.2.3 Linguistische Approximation

Als linguistische Approximation wird das Verfahren bezeichnet, das der Fuzzy-Menge  $\tilde{V}$  aus der Basisvariablen  $V^{\Pi(Y)}$ , die assoziiert ist mit der linguistischen Variablen  $V = (., ., \mathcal{M})$ , einen linguistischen Ausdruck aus der Menge  $\mathcal{M}$  zuordnet. Das Ergebnis dieses Verfahrens sollte denjenigen linguistischen Ausdruck  $(., B) \in \mathcal{M}$  liefern, dessen Fuzzy-Menge  $B$  am „Ähnlichsten“ zu der Fuzzy-Menge  $\tilde{V}$  ist. Aufgrund verschiedener intuitiver Auffassungen zur Ähnlichkeit gibt es auch verschiedene mathematische Ansätze. Als Basis für die linguistische Approximation dient eine Metrik auf Fuzzy-Mengen als Vergleichsmaß. Im folgenden werden vier Vergleichsmaße vorgestellt: das Distanzmaß, die Höhe des Durchschnitts, das Ähnlichkeitsmaß und das Vergleichsmaß von Heiko Förster.

**Definition 2.2.6** Sei  $Y$  eine Menge und seien  $\tilde{V}, B$  Fuzzy-Mengen über  $Y$ .  
Das Vergleichsmaß Distanzmaß ist eine Metrik definiert durch:

**Distanzmaß**

$$d(\tilde{V}, B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|Y|} \sqrt{\sum_{y \in Y} (\mu_{\tilde{V}}(y) - \mu_B(y))^2}.$$

Falls  $Y$  ein Intervall ist, eignet sich diese Definition nicht und man verwendet dafür die folgende Definition.

**Definition 2.2.7** Sei  $[a, b]$  ein Intervall und seien  $\tilde{V}, B$  Fuzzy-Mengen über  $[a, b]$ . Sind  $\mu_{\tilde{V}}$  und  $\mu_B$  im Intervall  $[a, b]$  integrierbar, dann ist

**Distanzmaß**

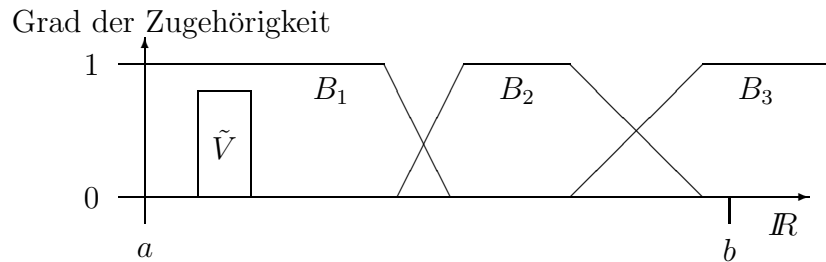
**für  
Fuzzy-Mengen  
über  
Intervallen**

$$d(\tilde{V}, B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \sqrt{\int_a^b (\mu_{\tilde{V}}(y) - \mu_B(y))^2 dy}$$

das Distanzmaß zwischen  $\tilde{V}$  und  $B$ .

Dieses Vergleichsmaß bildet die intuitive Approximation insbesondere für Fuzzy-Mengen über Mengen, die keine Intervalle sind, im Allgemeinen gut ab. Die Approximation für Fuzzy-Mengen über Intervallen ergibt jedoch manchmal nicht das zunächst erwartete Ergebnis, wenn man sich die Fuzzy-Mengen als Funktionsgraphen wie im Beispiel 2.2.8 veranschaulicht.

**Beispiel 2.2.8** Seien  $B_1, B_2, B_3$  und  $\tilde{V}$  Fuzzy-Mengen wie unten dargestellt.



Dann gilt:

$$d(\tilde{V}, B_1) > d(\tilde{V}, B_2) > d(\tilde{V}, B_3) !$$

**Höhe des  
Durchschnitts**

**Definition 2.2.9** Sei  $Y$  eine Menge und seien  $\tilde{V}, B$  Fuzzy-Mengen über  $[a, b]$ . Die Höhe des Durchschnitts ist definiert durch:

$$\rho(\tilde{V}, B) \stackrel{\text{def}}{=} \text{hgt}(\tilde{V} \cap B) .$$

Das Vergleichsmaß Höhe des Durchschnitts ist eine Metrik definiert durch  $\bar{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \rho$ .

Dieses Vergleichsmaß sollte in einem Fuzzy-Expertensystem nur dann genommen werden, wenn die Fuzzy-Mengen der Ausdrücke innerhalb einer linguistischen Variablen in etwa die gleiche Kardinalität haben, da sonst die Höhe des Durchschnitts der Fuzzy-Menge  $\tilde{V}$  vom Ergebnis mit der Fuzzy-Menge  $B_1$  eines linguistischen Ausdrucks höher sein kann als die Höhe des Durchschnitts der Fuzzy-Menge  $\tilde{V}$  mit der Fuzzy-Menge  $B_2$  eines anderen linguistischen Ausdrucks, obwohl die Kardinalität des ersten Durchschnitts der Fuzzy-Menge  $\tilde{V}$  mit der Fuzzy-Menge  $B_1$  kleiner oder sogar viel kleiner als die Kardinalität des zweiten Durchschnitts der Fuzzy-Menge  $\tilde{V}$  mit der Fuzzy-Menge  $B_2$  ist:

Sei  $\tilde{V}$  die Fuzzy-Menge des Ergebnisses und  $B_1, B_2$  Fuzzy-Mengen von linguistischen Ausdrücken. Dann kann es sein, daß  $\rho(\tilde{V}, B_1) < \rho(\tilde{V}, B_2)$ , obwohl  $\text{card}(\tilde{V} \cap B_1) \gg \text{card}(\tilde{V} \cap B_2)$  ist.

**Ähnlichkeits-  
maß  
(J. Kacprzyk)**

**Definition 2.2.10** Sei  $Y$  eine Menge und seien  $\tilde{V}, B$  Fuzzy-Mengen über  $Y$ . Das Ähnlichkeitsmaß von  $\tilde{V}$  und  $B$  ist definiert durch (Kacprzyk, 1983)

$$\text{sim}(\tilde{V}, B) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \max_{y \in Y} \{ |\mu_{\tilde{V}}(y) - \mu_B(y)| \} .$$

Das Vergleichsmaß nach J. Kacprzyk ist eine Metrik, die definiert ist durch  $\overline{\text{sim}} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \text{sim}$ .

Wie bei der Höhe des Durchschnitts wird auch bei dem Ähnlichkeitsmaß nur ein markantes  $y \in Y$  bewertet. Vom Ähnlichkeitsmaß wird nur das  $y \in Y$  bewertet, für das die Zugehörigkeitsgrade die größte Differenz aufweist.

Der Autor dieser Diplomarbeit schlägt das folgende Vergleichsmaß **idu** (**i**ntersection **d**ivide **u**nion) vor.

**Definition und Satz 2.2.11** Sei  $Y$  eine Menge und seien  $\tilde{V}, B$  Fuzzy-Mengen über  $Y$ . Das Vergleichsmaß von Heiko Förster ist eine Metrik definiert durch:

**Vergleichsmaß  
von  
Heiko Förster**

$$\text{idu}(\tilde{V}, B) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 - \frac{\text{card}(\tilde{V} \cap B)}{\text{card}(\tilde{V} \cup B)} & , \text{hgt}(\tilde{V} \cup B) > 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

**Beweis 2.2.12** Es ist zu zeigen, das idu eine Metrik ist, daß also für Fuzzy-Mengen  $A, B$  und  $C$  über einer Menge  $X$  gilt (Bandemer und Gottwald, 1993):

- (i)  $\text{idu}(A, B) = 0$ , wenn  $A = B$ , (Identitätseigenschaft)
- (ii)  $\text{idu}(A, B) = \text{idu}(B, A)$ , (Symmetrie)
- (iii)  $\text{idu}(A, B) + \text{idu}(B, C) \geq \text{idu}(A, C)$  (Dreiecksungleichung)

Sei also  $X$  eine Menge und  $A, B$  und  $C$  Fuzzy-Mengen über  $X$ .

Für  $\text{hgt}(A \cup B) > 0$  ist mit  $A \cap B \subseteq A \cup B$  auch  $\text{card}(A \cap B) \leq \text{card}(A \cup B)$  und somit

$$0 \leq 1 - \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A \cup B)} = \text{idu}(A, B) \leq 1 .$$

Zu (i): Aus  $A = B$  mit  $\text{hgt}(A \cup B) = 0$  folgt die Behauptung direkt und für  $\text{hgt}(A \cup B) > 0$  gilt:

$$\text{idu}(A, B) = 1 - \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A \cup B)} = 1 - \frac{\text{card}(A \cap A)}{\text{card}(A \cup A)} = 1 - \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(A)} = 1 - 1 = 0 .$$

Zu (ii): Aus  $\text{hgt}(A \cup B) = 0$  folgt direkt  $\text{idu}(A, B) = 0 = \text{idu}(B, A)$  und mit  $\text{hgt}(A \cup B) > 0$  gilt:

$$\text{idu}(A, B) = 1 - \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A \cup B)} = 1 - \frac{\text{card}(B \cap A)}{\text{card}(B \cup A)} = \text{idu}(B, A) .$$

Zu (iii): Aus  $\text{hgt}(A \cup C) = 0$  folgt mit  $\text{hgt}(B) = 0$  direkt:

$$\text{idu}(A, B) + \text{idu}(B, C) = 0 + 0 \geq 0 = \text{idu}(A, C) ,$$

da  $\text{hgt}(A \cup B) = 0$  und  $\text{hgt}(B \cup C) = 0$  ist. Und mit  $\text{hgt}(B) > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{idu}(A, B) + \text{idu}(B, C) &= 1 - \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A \cup B)} + 1 - \frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(B \cup C)} \\ &= 1 - \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(B)} + 1 - \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(B)} \\ &= 1 - 0 + 1 - 0 > 1 \geq \text{idu}(A, C) , \end{aligned}$$

da  $\text{hgt}(A \cup B) > 0$  und  $\text{hgt}(B \cup C) > 0$  ist.

Bleibt noch zu zeigen, daß (iii) auch bei  $\text{hgt}(A \cup C) > 0$  gilt.

Sei also  $\text{hgt}(A \cup C) > 0$ .

Falls  $\text{hgt}(A \cup B) = 0$  ist, ist  $A = B$  und es gilt:

$$\text{idu}(A, B) + \text{idu}(B, C) = \text{idu}(A, B) + \text{idu}(A, C) \geq \text{idu}(A, C) .$$

Falls  $\text{hgt}(B \cup C) = 0$  ist, ist  $B = C$  und es gilt:

$$\text{idu}(A, B) + \text{idu}(B, C) = \text{idu}(A, C) + \text{idu}(B, C) \geq \text{idu}(A, C) .$$

Sei nun auch  $\text{hgt}(A \cup B) > 0$  und  $\text{hgt}(B \cup C) > 0$ . Somit ist

$$\text{idu}(A, B) = 1 - \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A \cup B)} ,$$

$$\text{idu}(B, C) = 1 - \frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(B \cup C)}$$

und

$$\text{idu}(A, C) = 1 - \frac{\text{card}(A \cap C)}{\text{card}(A \cup C)} .$$

Durch Einsetzen der Definitionen gilt die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned}
& \text{idu}(A, B) + \text{idu}(B, C) \geq \text{idu}(A, C) \\
\iff & 1 - \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A \cup B)} + 1 - \frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(B \cup C)} \geq 1 - \frac{\text{card}(A \cap C)}{\text{card}(A \cup C)} \\
\iff & 1 + \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A \cup C)} \geq \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A \cup B)} + \frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(B \cup C)} \\
\iff & \text{card}(A \cup C)\text{card}(A \cup B)\text{card}(B \cup C) + \text{card}(A \cap C)\text{card}(A \cup B)\text{card}(B \cup C) \\
& \geq \text{card}(A \cap B)\text{card}(A \cup C)\text{card}(B \cup C) + \text{card}(B \cap C)\text{card}(A \cup C)\text{card}(A \cup B) \\
\iff & \sum_{x \in X} \mu_{A \cup C}(x) \sum_{x \in X} \mu_{A \cup B}(x) \sum_{x \in X} \mu_{B \cup C}(x) \\
& + \sum_{x \in X} \mu_{A \cap C}(x) \sum_{x \in X} \mu_{A \cup B}(x) \sum_{x \in X} \mu_{B \cup C}(x) \\
& \geq \sum_{x \in X} \mu_{A \cap B}(x) \sum_{x \in X} \mu_{A \cup C}(x) \sum_{x \in X} \mu_{B \cup C}(x) \\
& + \sum_{x \in X} \mu_{B \cap C}(x) \sum_{x \in X} \mu_{A \cup C}(x) \sum_{x \in X} \mu_{A \cup B}(x) \\
\iff & (*) ,
\end{aligned}$$

wobei (\*) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \sum_{x \in X} \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} \sum_{x \in X} \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \sum_{x \in X} \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} \\
& + \sum_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} \sum_{x \in X} \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \sum_{x \in X} \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} \\
& \geq \sum_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \sum_{x \in X} \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} \sum_{x \in X} \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} \\
& + \sum_{x \in X} \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\} \sum_{x \in X} \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\} \sum_{x \in X} \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}
\end{aligned}$$

sei.

Im weiteren Beweis wird nun noch die Ungleichung (\*) gezeigt:

Sei

$$\begin{aligned}
 \pi(X) = \{X' \mid X' \subseteq X, \quad & \forall x \in X' \quad \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_C(x) && \text{(Fall 1)} \quad , \\
 & \vee \forall x \in X' \quad \mu_A(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_B(x) && \text{(Fall 2)} \quad , \\
 & \vee \forall x \in X' \quad \mu_C(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_B(x) && \text{(Fall 3)} \quad , \\
 & \vee \forall x \in X' \quad \mu_B(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_C(x) && \text{(Fall 4)} \quad , \\
 & \vee \forall x \in X' \quad \mu_B(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_A(x) && \text{(Fall 5)} \quad , \\
 & \vee \forall x \in X' \quad \mu_C(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_A(x)\} && \text{(Fall 6)} \quad .
 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\bigcup_{X' \in \pi(X)} X' = X .$$

Sei  $X' \in \pi(X)$ .

Fall 1:  $\forall x \in X' \quad \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_C(x)$ . Seien  $\Delta_{A,C}$  und  $\Delta_{B,C}$  Funktionen definiert durch:

$$\Delta_{A,C} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_A(x) - \mu_C(x)$$

und

$$\Delta_{B,C} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_B(x) - \mu_C(x) .$$



Dann gilt die Folgerung:

$$\begin{aligned}
& \forall x \in X \quad \Delta_{A,C}(x) + \mu_C(x) = \mu_A(x) \geq \mu_B(x) = \Delta_{B,C}(x) + \mu_C(x) \\
\Rightarrow & \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \geq \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \\
\Rightarrow & \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \geq \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \right)^2 \\
\Rightarrow & \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \\
& \quad + \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \\
\geq & \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \right)^2 + 2 \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \right)^2 \\
& \quad + \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \\
\Rightarrow & \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \right) \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \right) \\
& \quad + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \right) \\
\geq & \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \right) \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \right) \\
& \quad + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \right) \\
\Rightarrow & \sum_{x \in X'} (\mu_C(x) + \Delta_{A,C}(x)) \sum_{x \in X'} (\mu_C(x) + \Delta_{B,C}(x)) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} (\mu_C(x) + \Delta_{B,C}(x)) \\
\geq & \sum_{x \in X'} (\mu_C(x) + \Delta_{B,C}(x)) \sum_{x \in X'} (\mu_C(x) + \Delta_{B,C}(x)) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} (\mu_C(x) + \Delta_{A,C}(x)) \\
\Rightarrow & \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \mu_B(x) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \\
\geq & \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \mu_B(x) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \\
\Rightarrow & \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \mu_B(x) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \\
\geq & \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \mu_B(x) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \\
\Rightarrow & (*) .
\end{aligned}$$

Fall 2:  $\forall x \in X' \mu_A(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_B(x)$ . Seien  $\Delta_{A,B}$  und  $\Delta_{C,B}$  Funktionen definiert durch:

$$\Delta_{A,B} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_A(x) - \mu_B(x)$$

und

$$\Delta_{C,B} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_C(x) - \mu_B(x) .$$

Die kommende Folgerung läßt sich analog zur Folgerung aus dem Fall 1 zeigen:

$$\begin{aligned} & \forall x \in X \quad \Delta_{A,B}(x) \geq 0, \Delta_{C,B}(x) \geq 0, \mu_B(x) = 0 \\ \implies & \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) + 2 \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) \right)^2 \geq 0 \\ \implies & \left( \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \\ & + \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) \\ & + \left( \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \right)^2 + 2 \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) \right)^2 \\ \geq & \left( \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) \\ & + \left( \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \\ \implies & (*) . \end{aligned}$$

Fall 3:  $\forall x \in X' \mu_C(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ . Seien  $\Delta_{C,B}$  und  $\Delta_{A,B}$  Funktionen definiert durch:

$$\Delta_{C,B} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_C(x) - \mu_B(x)$$

und

$$\Delta_{A,B} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_A(x) - \mu_B(x) .$$

Die kommende Folgerung läßt sich analog zur Folgerung aus dem Fall 1 zeigen:

$$\begin{aligned} & \forall x \in X \quad \Delta_{C,B}(x) \geq 0, \Delta_{A,B}(x) \geq 0, \mu_B(x) = 0 \\ \implies & \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) + 2 \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \right)^2 \geq 0 \\ \implies & \left( \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \\ & + \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) \\ & + \left( \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \right)^2 + 2 \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \right)^2 \\ \geq & \left( \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,B}(x) \\ & + \left( \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_B(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,B}(x) \\ \implies & (*) . \end{aligned}$$

Fall 4:  $\forall x \in X' \mu_B(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_C(x)$ . Seien  $\Delta_{B,C}$  und  $\Delta_{A,C}$  Funktionen definiert durch:

$$\Delta_{B,C} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_B(x) - \mu_C(x)$$

und

$$\Delta_{A,C} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_A(x) - \mu_C(x) .$$

Die kommende Folgerung läßt sich analog zur Folgerung aus dem Fall 1 zeigen:

$$\begin{aligned} & \forall x \in X \quad \Delta_{B,C}(x) + \mu_C(x) = \mu_B(x) \geq \mu_A(x) = \Delta_{A,C}(x) + \mu_C(x) \\ \Rightarrow & \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \geq \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \\ \Rightarrow & 2 \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \geq 2 \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \\ \Rightarrow & \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \geq 2 \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \\ \Rightarrow & \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \\ & \geq 2 \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \\ \Rightarrow & \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \\ & \geq 2 \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \right)^2 \\ \Rightarrow & \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \\ & \geq 2 \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \right)^2 \\ \Rightarrow & \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \\ & \quad + \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,C}(x) \\ & \geq \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \right)^2 + 2 \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \right)^2 \\ & \quad + \left( \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_C(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{A,C}(x) \\ \Rightarrow & (*) . \end{aligned}$$

Fall 5:  $\forall x \in X' \mu_B(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_A(x)$ . Seien  $\Delta_{B,A}$  und  $\Delta_{C,A}$  Funktionen definiert durch:

$$\Delta_{B,A} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_B(x) - \mu_A(x)$$

und

$$\Delta_{C,A} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_C(x) - \mu_A(x) .$$

Die kommende Folgerung läßt sich analog zur Folgerung aus dem Fall 1 zeigen:

$$\begin{aligned} & \forall x \in X \quad \Delta_{B,A}(x) + \mu_A(x) = \mu_B(x) \geq \mu_C(x) = \Delta_{C,A}(x) + \mu_A(x) \\ \implies & \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \geq \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \\ \implies & \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \geq \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \\ \implies & \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \geq 2 \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \\ \implies & \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \geq 2 \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \\ \implies & \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \\ & \geq 2 \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \right)^2 \\ \implies & \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \\ & \geq 2 \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \right)^2 \\ \implies & \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) + \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \\ & \quad + \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \\ & \geq \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \right)^2 + \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \\ & \quad + \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \right)^2 + 2 \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) + \left( \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \right)^2 \\ \implies & (*) . \end{aligned}$$

Fall 6:  $\forall x \in X' \mu_u(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_A(x)$ . Seien  $\Delta_{C,A}$  und  $\Delta_{B,A}$  Funktionen definiert durch:

$$\Delta_{C,A} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_C(x) - \mu_A(x)$$

und

$$\Delta_{B,A} : X' \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \mu_B(x) - \mu_A(x) .$$

Die kommende Folgerung läßt sich analog zur Folgerung aus dem Fall 1 zeigen:

$$\begin{aligned} & \forall x \in X \quad \Delta_{C,A}(x) + \mu_A(x) = \mu_C(x) \geq \mu_B(x) = \Delta_{B,A}(x) + \mu_A(x) \\ \Rightarrow & \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \geq \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \\ \Rightarrow & \sum_{x \in X'} \mu_A(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \geq \sum_{x \in X'} \mu_A(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \\ \Rightarrow & \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \right) \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \right) \\ & \quad + \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \right) \\ & \geq \sum_{x \in X'} \mu_A(x) \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{C,A}(x) \right) \\ & \quad + \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \right) \left( \sum_{x \in X'} \mu_A(x) + \sum_{x \in X'} \Delta_{B,A}(x) \right) \\ \Rightarrow & (*) . \end{aligned}$$

Falls die Fuzzy-Mengen über Intervallen definiert sind, läuft der Beweis analog.

□

Dieses Vergleichsmaß vergleicht die Überlappung im Verhältnis zur Gesamtfläche. Damit entspricht sie weitestgehend dem visuellen Vergleich zweier Flächen. In der Praxis zeigt sich, daß die Approximation mit dem Distanzmaß und dem Vergleichsmaß von Heiko Förster häufig das gleiche Ergebnis liefern. Für die Fuzzy-Mengen aus Beispiel 2.2.8 liefert es aber das erwartete Ergebnis:

$$d(\tilde{V}, B_1) < d(\tilde{V}, B_2) , d(\tilde{V}, B_3) .$$

**Definition 2.2.13** Sei  $V = (., Y, \mathbf{M})$  eine linguistische Variable und sei  $d_{\Pi(Y)}$  ein Vergleichsmaß. Als linguistische Approximation von  $\tilde{V}$  zu  $\mathbf{M}$  mit Parameter  $d_{\Pi(Y)}$  bezeichnet man die Relation

$$\text{App}_{V, d_{\Pi(Y)}} : \Pi(Y) \longrightarrow \mathbf{M}, \tilde{V} \longmapsto M \in \mathcal{E}$$

mit

$$\mathcal{E} = \{(\cdot, B) \mid (\cdot, B) \in \mathbf{M}, \forall (\cdot, B_1) \in \mathbf{M} \ d_{\Pi(Y)}(\tilde{V}, B_1) \geq d_{\Pi(Y)}(\tilde{V}, B)\} .$$

Da nach der Definition der linguistischen Variablen die Menge  $\mathbf{M} \neq \emptyset$  ist, ist auch  $\mathcal{E} \neq \emptyset$ . Somit liefert die linguistische Approximation immer einen linguistischen Ausdruck als Ergebnis. Da sogar in einigen Fällen  $|\mathcal{E}| > 1$  ist, ist die linguistische Approximation im Allgemeinen jedoch nicht deterministisch.

## 2.3 Fuzzy-Logik

**Definition 2.3.1** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Die Funktion

$$\text{imp} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1], (\mu_A(x), \mu_B(y)) \longmapsto \text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

heißt Fuzzy-Implikationsoperator.

**Definition 2.3.2** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Die Fuzzy-Implikation  $A \implies B$  ist eine Fuzzy-Relation über  $X \times Y$  und es gilt für alle  $x \in X, y \in Y$

$$\mu_{A \implies B}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) .$$

Es folgen zehn verschiedene Ansätze des Fuzzy-Implikationsoperators.

**Definition 2.3.3** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator von Mamdami / Assilian ist definiert durch

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} .$$

**Definition 2.3.4** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator von Fukami / Tanaka / Mizumoto ist definiert durch

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & , \mu_A(x) = \mu_B(y) \\ 1 - \mu_B(y) & , \mu_A(x) < \mu_B(y) \\ 0 & , \mu_A(x) > \mu_B(y) . \end{cases}$$

**Linguistische  
Approximati-  
on**

**Fuzzy-  
Implikations-  
operator**

**Fuzzy-  
Implikation**

**Mamdami /  
Assilian**

**Fukami /  
Tanaka /  
Mizumoto**

**Bounded Product**

**Definition 2.3.5** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator Bounded Product ist definiert durch

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(y) - 1\} .$$

**Drastic Product**

**Definition 2.3.6** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator Drastic Product ist definiert durch

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mu_A(x) & , \mu_B(y) = 1 \\ \mu_B(y) & , \mu_A(x) = 1 \\ 0 & , \mu_A(x), \mu_B(y) < 1 . \end{cases}$$

**Arithmetic Rule**

**Definition 2.3.7** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator Arithmetic Rule ist definiert durch

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\} .$$

**Maximin Rule**

**Definition 2.3.8** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator Maximin Rule ist definiert durch

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, 1 - \mu_A(x)\right\} .$$

**Boolean Implication**

**Definition 2.3.9** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator Boolean Implication ist definiert durch

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\} .$$

**Bandler**

**Definition 2.3.10** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator von Bandler ist definiert durch

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \begin{array}{l} \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}, \\ \max\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\}, \\ \max\{\mu_B(y), 1 - \mu_B(y)\} \end{array} \right\} .$$



**Definition 2.3.11** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator Standard Sequence ist definiert durch

**Standard Sequence**

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & , \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ 0 & , \mu_A(x) > \mu_B(y) . \end{cases}$$

**Definition 2.3.12** Seien  $X, Y$  Mengen und  $A$  eine Fuzzy-Menge über  $X$ ,  $B$  eine Fuzzy-Menge über  $Y$ . Der Fuzzy-Implikationsoperator Gödelian Logic ist definiert durch

**Gödelian Logic**

$$\text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & , \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ \mu_B(y) & , \mu_A(x) > \mu_B(y) . \end{cases}$$

In Anlehnung an die Regel *Modus Ponens* der Aussagenlogik (Oberschelp, 1991)

$$\frac{\begin{array}{l} \vdash A \implies B \\ \vdash A \end{array}}{\vdash B}$$

wird diese Regel für die Fuzzy-Logik erweitert:

Seien  $X, Y$  Mengen und  $A, A'$  Fuzzy-Mengen über  $X$  und  $B, B'$  Fuzzy-Mengen über  $Y$ . Dann soll gelten:

$$\frac{\begin{array}{l} \vdash A \implies B \\ \vdash A' \end{array}}{\vdash B'}$$

dabei sei

$$B' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (y, \mu_{B'}(y)) \mid y \in Y \right\}$$

mit

$$\mu_{B'}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} \min \left\{ \mu_{A'}(x), \text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \right\} .$$

Die Fuzzy-Menge  $A'$  braucht dabei nicht mit der Fuzzy-Menge  $A$  übereinzustimmen.

Die praktische Anwendung folgt im Kapitel 2.4.

## 2.4 Approximatives Schließen

### 2.4.1 Motivation und Definition

Die Motivation soll durch ein Beispiel gezeigt werden:

**Beispiel 2.4.1** Soll ein Topf Wasser auf einer alten Herdplatte, die eine große Wärmespeicherkapazität hat, auf einer bestimmten Temperatur gehalten werden, können folgende Regeln verwendet werden:

Wenn die Wassertemperatur zu niedrig ist, dann voll heizen.

Wenn die Wassertemperatur zu hoch ist, dann nicht heizen.

Das Wasser würde mit dieser zweiwertigen Regelung ziemlich großen Temperaturschwankungen unterlegen sein, da nach Erreichen der Soll-Temperatur zwar die Herdplatte ausgeschaltet wird, jedoch auf Grund der großen Wärmespeicherkapazität der Herdplatte das Wasser weiter erhitzt wird.

Es ist also besser, wenn die Herdplatte nicht nur ein oder aus geschaltet wird, sondern je mehr die Ist-Temperatur sich der Soll-Temperatur angleicht, die Herdplatte weniger heizt. Dazu kann die Wassertemperatur, die  $2^\circ\text{C}$  unter der Soll-Temperatur liegt, als zu niedrig und die Wassertemperatur, die  $2^\circ\text{C}$  über der Soll-Temperatur liegt, als zu hoch angesehen werden. In diesen Bereichen sollen die o. g. Regeln gelten. In dem Bereich zwischen  $2^\circ\text{C}$  unter der Soll-Temperatur und  $2^\circ\text{C}$  über der Soll-Temperatur soll eine Komposition aus voll heizen und nicht heizen wirksam sein.

Viele und interessante Beispiele sind in einem Buch von H.-J. Zimmermann (Zimmermann und von Atrock (Hrsg), 1994) zu finden.

Mit Hilfe einer Fuzzy-Relation kann eine Beziehung zwischen zwei linguistischen Variablen formuliert werden. Zadeh wählte dafür die Sup-Min-Komposition (Zadeh, 1965):

#### Sup-Min-Komposition

**Definition 2.4.2** Seien  $U = (., X, \mathcal{L})$ ,  $V = (., Y, \mathcal{M})$  linguistische Variablen und  $(., A) \in \mathcal{L}$ . Sei  $\tilde{U} = A$  und  $R$  eine Fuzzy-Relation über  $X \times Y$ . Dann sei  $\tilde{V} \stackrel{\text{def}}{=} B$  definiert durch

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (y, \mu_B(y)) \mid y \in Y \right\}$$

mit

$$\mu_B(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_R(x, y)\} .$$

Die Beziehung zwischen den beiden linguistischen Variablen entspricht der aus Programmiersprachen bekannte **if.then.**-Form

$$\mathbf{if} \tilde{U} \mathbf{is} A \mathbf{then} \tilde{V} \mathbf{is} B .$$

Mit Hilfe der Sup-Min-Komposition kann jeder Fuzzy-Menge  $A$  als Inhalt der Basisvariablen, die mit der linguistischen Variablen  $U$  assoziiert ist, eine Fuzzy-Menge  $B$  als Inhalt der Basisvariablen, die mit der linguistischen Variablen  $V$  assoziiert ist, bestimmt werden.

In einem wissensbasierten Fuzzy-Modellierungssystem bzw. in einem Fuzzy-Expertensystem ist die Situation jedoch umgekehrt. Eine Beziehung zwischen zwei linguistischen Variablen ist in der Form eines **if.then.**-Konditionalsatzes vorgegeben, die Fuzzy-Mengen  $A$  und  $B$  sind also gegeben, und es muß eine Relation  $R$  gesucht werden, so daß diese Sup-Min-Komposition erfüllt oder zumindest angenähert ist. Ist diese Relation  $R$  gefunden, kann man zu jedem  $A'$  über  $X$  ein  $B'$  über  $Y$  in Analogie zu der Regel *Modus Ponens* bestimmen:

$$\frac{\begin{array}{l} \vdash \mathbf{if} \tilde{U} \mathbf{is} A \mathbf{then} \tilde{V} \mathbf{is} B \\ \vdash \tilde{U} \mathbf{is} A' \end{array}}{\vdash \tilde{V} \mathbf{is} B' .}$$

Dabei sein  $A, A'$  Fuzzy-Mengen über  $X$  und  $B, B'$  Fuzzy-Mengen über  $Y$ . Im Gegensatz zur Regel *Modus Ponens* braucht  $A'$  nicht mit  $A$  übereinzustimmen. In der Praxis werden für die Relation  $R$  Fuzzy-Implikationen gewählt. Die Bestimmung von  $B'$  erfolgt damit durch die Inferenzmethode (Kruse et al., 1995):

**Definition 2.4.3** Seien  $U = (., X, \mathcal{L})$ ,  $V = (., Y, \mathcal{M})$  linguistische Variablen,  $(., A) \in \mathcal{L}$  und  $(., B) \in \mathcal{M}$ . Sei  $A'$  die Fuzzy-Menge  $\tilde{U}$ . Die Funktion

**Inferenz-  
methode**

$$\mathbf{if.then.} : \Pi(X) \times \Pi(X \times Y) \longrightarrow \Pi(Y), \quad (A', R) \longmapsto B'$$

mit

$$\mu_{B'}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} \min \left\{ \mu_{A'}(x), \text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(y)) \right\}$$

heißt Inferenzmethode.

Zum leichteren Umgang mit den Beziehungen definieren wir die Regel.

**Regel**

**Definition 2.4.4** Seien  $U = (U_N, \cdot, \mathcal{L})$  und  $V = (V_N, \cdot, \mathcal{M})$  linguistische Variablen. Sei  $(A_N, A) \in \mathcal{L}$  und  $(B_N, B) \in \mathcal{M}$ . Für

**if  $\tilde{U}$  is  $A$  then  $\tilde{V}$  is  $B$**

schreiben wir auch

**if  $U_N$  is  $A_N$  then  $V_N$  is  $B_N$**

und nennen eine solche Beziehung Regel.

**Beispiel 2.4.5** Seien  $U = (\text{Sonnenschein}, X, \mathcal{L})$  und  $V = (\text{Lebensgefühl}, Y, \mathcal{M})$  linguistische Variablen und seien  $(\text{viel}, A) \in \mathcal{L}$ ,  $(\text{stark}, B) \in \mathcal{M}$ . Mit

**if Sonnenschein is viel then Lebensgefühl is stark**

meinen wir

**if  $\tilde{U}$  is  $A$  then  $\tilde{V}$  is  $B$ .**

## 2.4.2 Vergleich der Inferenzmethoden

Zunächst folgt ein Vergleich einer Regel mit unterschiedlichen Inferenzmethoden und anschließend das Zusammenwirken mehrere Regeln einer Inferenzmethode.

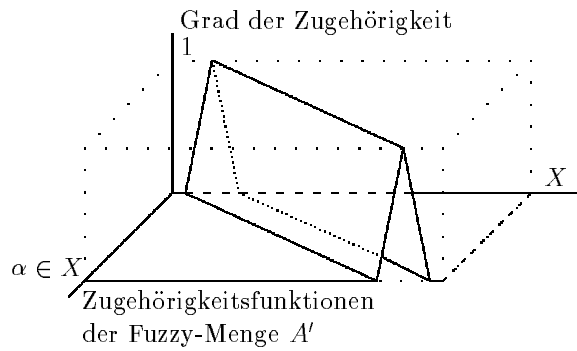
### Vergleich der einzelnen Inferenzmethoden

Für den Vergleich der Inferenzmethoden betrachten wir

$$\frac{\begin{array}{l} \vdash \text{ if } \tilde{U} \text{ is } A \text{ then } \tilde{V} \text{ is } B \\ \vdash \tilde{U} \text{ is } A' \end{array}}{\vdash \tilde{V} \text{ is } B' ,}$$

mit den linguistischen Variablen  $U = (\cdot, X, \mathcal{L})$  und  $V = (\cdot, Y, \mathcal{M})$ , den Fuzzy-Mengen  $A, B$  aus  $(\cdot, A) \in \mathcal{L}$  und  $(\cdot, B) \in \mathcal{M}$  und den Fuzzy-Mengen  $A'$  über  $X$ ,  $B'$  über  $Y$ . Für die Fuzzy-Mengen  $A$  und  $B$  wählen wir den typischen Verlauf der Zugehörigkeitsfunktionen für Fuzzy-Mengen in linguistischen Ausdrücken und setzen

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , b < x < c \\ 1 - \frac{x-d}{c-d} & , c \leq x \leq d \\ 0 & , d < x \end{cases}$$



**Abbildung 2.1:** Stellt die Menge aller betrachteten Fuzzy-Mengen  $A'$  dar.

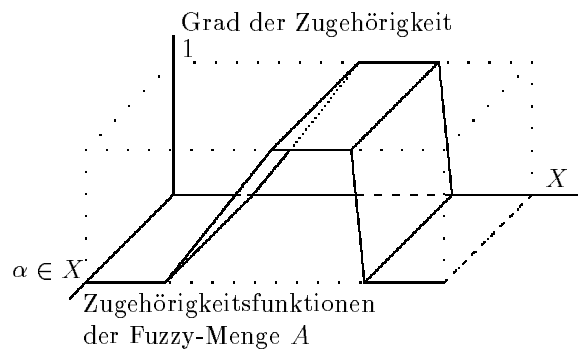
mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b < c < d$  und

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 0 & , y < e \\ \frac{y-e}{f-e} & , e \leq y \leq f \\ 1 & , f < y < g \\ 1 - \frac{y-h}{g-h} & , g \leq y \leq h \\ 0 & , h < y \end{cases}$$

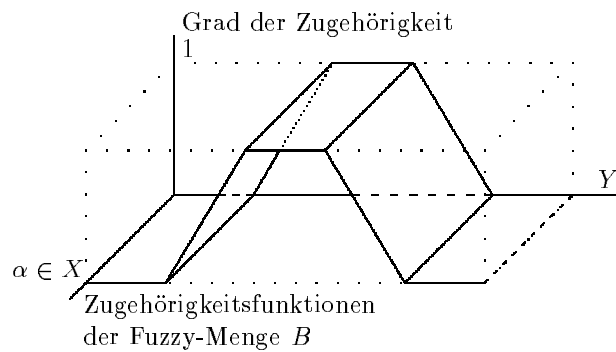
mit  $e, f, g, h \in \mathbb{R}$ ,  $e < f < g < h$ . Die Fuzzy-Menge  $A'$  sollen einen variablen unscharfen numerischen Wert darstellen (für  $A'$  als Crisp-Menge existieren bereits mehrere Untersuchungen (Mizumoto, 1988; Bui, 1993; Nöhr, 1995)), der über den Träger der Fuzzy-Menge  $A$  hinaus läuft. Für die Fuzzy-Menge  $A'$  wählen wir daher alle Fuzzy-Mengen mit  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $2\gamma = b - a, c - b$  und  $\gamma = 2(d - c)$  und der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 0 & , x < \alpha - \gamma \\ 1 - \left| \frac{x-\alpha}{\gamma} \right| & , \alpha - \gamma \leq x \leq \alpha + \gamma \\ 0 & , \alpha + \gamma < x \end{cases}$$

mit  $\alpha \in [a - \frac{3}{2}\gamma, d + \frac{3}{2}\gamma]$ . Die Abbildung 2.1 stellt die Menge aller Fuzzy-Mengen von  $A'$  dar. Diese Fuzzy-Mengen  $A'$  liegen parallel zur Abszisse und sind Fuzzy-Mengen über dem Intervall  $[a - \frac{5}{2}\gamma, d + \frac{5}{2}\gamma]$ . Die Ordinate entspricht dem Grad der Zugehörigkeit. Die dritte Koordinate geht über das Intervall  $[a - \frac{3}{2}\gamma, d + \frac{3}{2}\gamma]$ , über das  $\alpha$  betrachtet wird. Für das leichtere Verständnis des Vergleichs noch die Abbildung 2.2 der Fuzzy-Menge  $A$  und die Abbildung 2.3 der Fuzzy-Menge  $B$ . Die genauen Werte von  $a, b, c, d, \alpha, \gamma$  werden im weiteren Verlauf nicht betrachtet. Es genügt zu wissen, daß  $[\alpha - \gamma, \alpha + \gamma] \subset [a, b]$ ,  $[b, c]$  und  $[c, d] \subset [\alpha - \gamma, \alpha]$ ,  $[\alpha, \alpha + \gamma]$  für gewisse  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist, also der Träger der



**Abbildung 2.2:** Die Fuzzy-Menge  $A$  ist unabhängig von  $\alpha$  und deswegen in diesen Betrachtungen konstant. Das Koordinatensystem entspricht dem der Abbildung 2.1.



**Abbildung 2.3:** Die Fuzzy-Menge  $B$  ist wie die Fuzzy-Menge  $A$  für diese Betrachtungen konstant. Das Koordinatensystem entspricht dem der Abbildung 2.1, nur ist die Abszisse ein Intervall  $[x_1, x_2]$  mit  $x_1 < e$  und  $h < x_2$ . Dieses Koordinatensystem wird auch das in den folgenden Abbildungen sein.

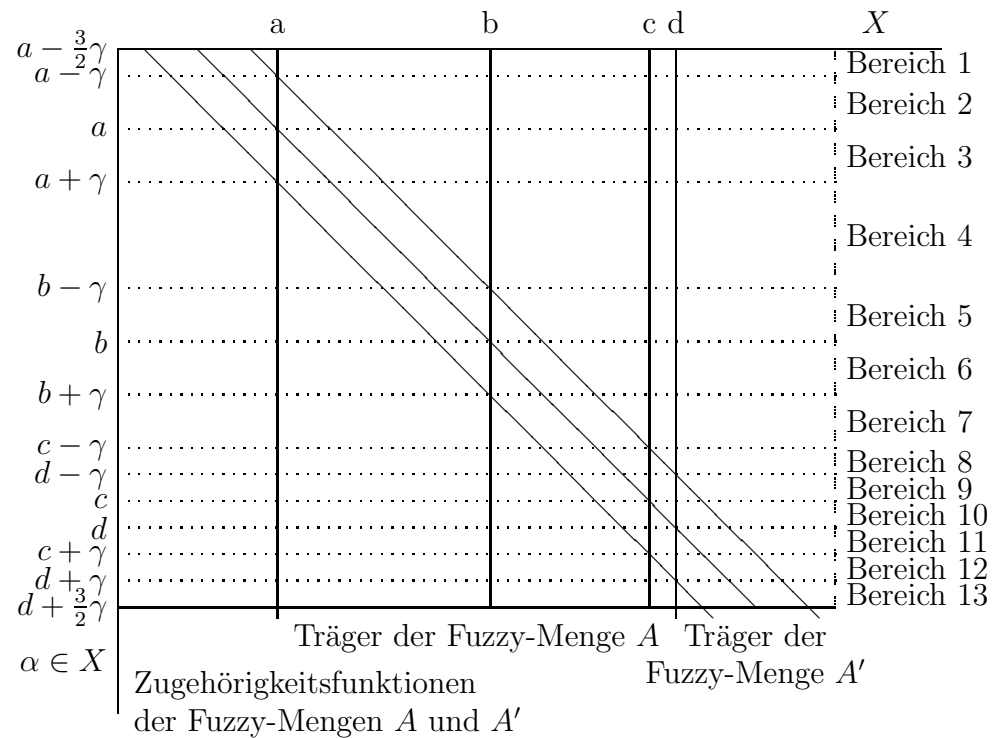
Bereich	Intervall
Bereich 1:	$[a - \frac{3}{2}\gamma, a - \gamma]$
Bereich 2:	$[a - \gamma, a]$
Bereich 3:	$[a, a + \gamma]$
Bereich 4:	$[a + \gamma, b - \gamma]$
Bereich 5:	$[b - \gamma, b]$
Bereich 6:	$[b, b + \gamma]$
Bereich 7:	$[b + \gamma, c - \gamma]$
Bereich 8:	$[c - \gamma, d - \gamma]$
Bereich 9:	$[d - \gamma, c]$
Bereich 10:	$[c, d]$
Bereich 11:	$[d, c + \gamma]$
Bereich 12:	$[c + \gamma, d + \gamma]$
Bereich 13:	$[d + \gamma, d + \frac{3}{2}\gamma]$

**Tabelle 2.1:** Die untersuchten Intervalle für den Parameter  $\alpha$ . Diese Intervalle sind noch einmal in der Abbildung 2.4 dargestellt.

Fuzzy-Menge  $A'$  eine Teilmenge des Intervalls der positiven Steigung der Zugehörigkeitsfunktion von  $A$  bzw. des Intervalls, wo  $\mu_A(x) = 1$  ist. Außerdem soll das Intervall der positiven Steigung bzw. der negativen Steigung von  $A'$  eine Obermenge von dem Intervall der negativen Steigung von  $A$  sein. Weiterhin unterteilen wir die Mengen der Fuzzy-Mengen  $A'$  nach der Tabelle 2.1 in einzelne Bereiche. Diese Bereiche sind in der Abbildung 2.4 noch einmal dargestellt. Die Abbildungen 2.5-2.14 geben die je nach Inferenzmethode berechneten Fuzzy-Mengen  $B'$  wieder.

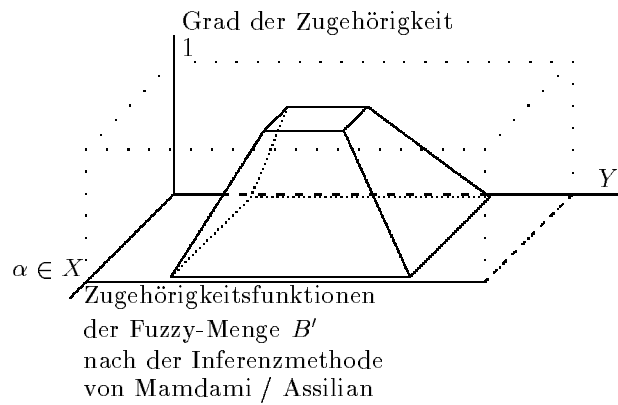
Die Fuzzy-Mengen  $B'$  haben nach der Anwendung der Fuzzy-Implikationsregeln folgende Eigenschaften:

- (a) Die Inferenzmethoden, bis auf die von Bandler und von Fukami / Assilian / Mizumoto, bewirken eine konstante Zugehörigkeitsfunktion der Fuzzy-Menge  $B'$  im Bereich 1 und 13.
- (b) Die Inferenzmethoden Bounded Product, Drastic Produkt und von Mamdani / Assilian erzeugen im Bereich 1 und 13 die Fuzzy-Menge  $\mathbb{I}_Y^\emptyset$  für  $B'$ .
- (c) Die Inferenzmethoden Standard Sequence, Boolean Implication, Arithmetic Rule, Maximum Rule und Gödelin Logic erzeugen im Bereich 1, 2 und 11, 12, 13 die Fuzzy-Menge  $\mathbb{I}_Y^Y$  für  $B'$ .
- (d) Die Inferenzmethode von Fukami / Tanaka / Mizumoto erzeugt für  $B'$  im Bereich 1, 2 und 11, 12, 13 die Fuzzy-Menge  $\overline{B}$ .

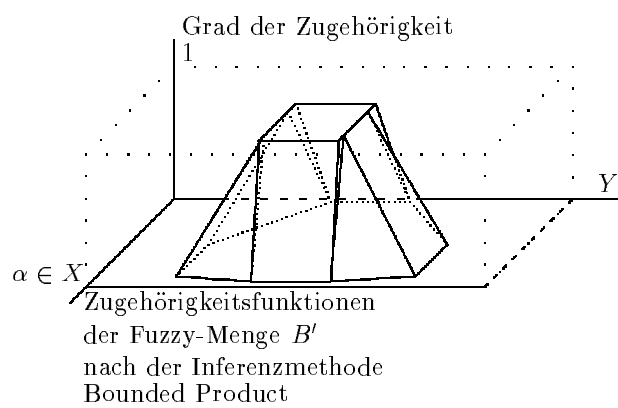


**Abbildung 2.4:** Die Intervalle der Tabelle 2.1 in graphischer Darstellung, betrachtet von der Achse des Grades der Zugehörigkeit (entspricht der Draufsicht der Abbildungen 2.2 und 2.1). Die durchgezogenen Linien stellen die Steigungsänderungen der Fuzzy-Mengen  $A$  und  $A'$  dar, die senkrechten der Fuzzy-Menge  $A$  und die diagonalen der Fuzzy-Mengen  $A'$ . Die gepunkteten Linien teilen die Menge der Fuzzy-Mengen  $A'$  in den Schnittpunkten der Steigungsänderungslinien.

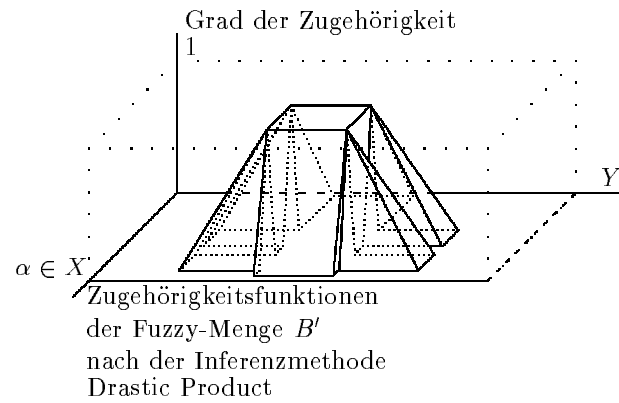




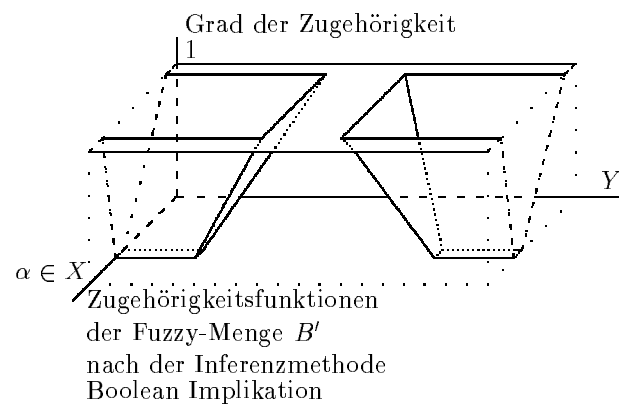
**Abbildung 2.5:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode von Mamdani / Assilian.



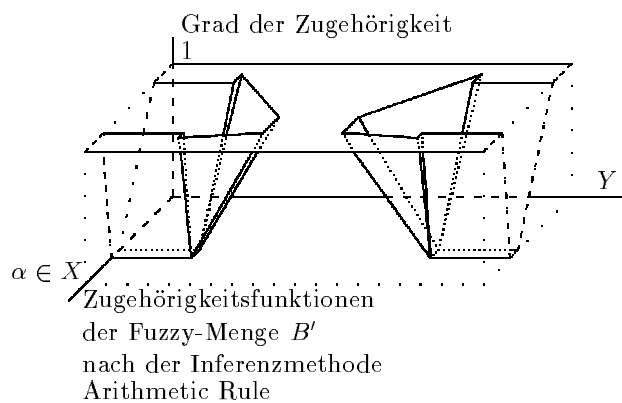
**Abbildung 2.6:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode Bounded Product.



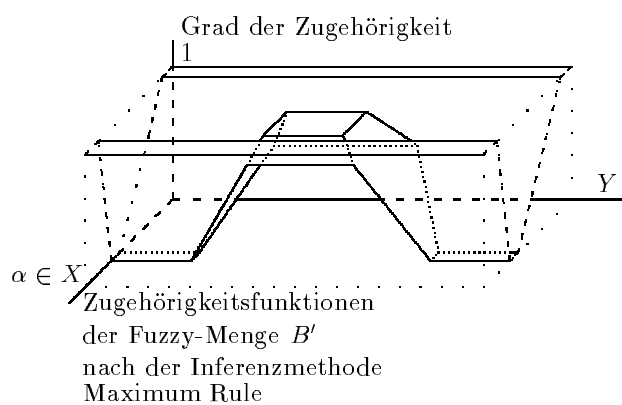
**Abbildung 2.7:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode Drastic Product.



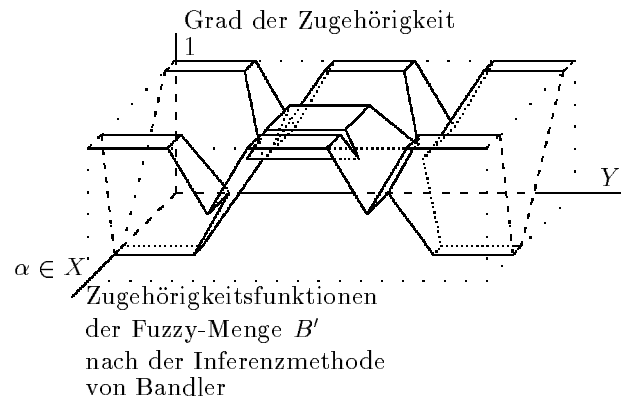
**Abbildung 2.8:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode Boolean Implication.



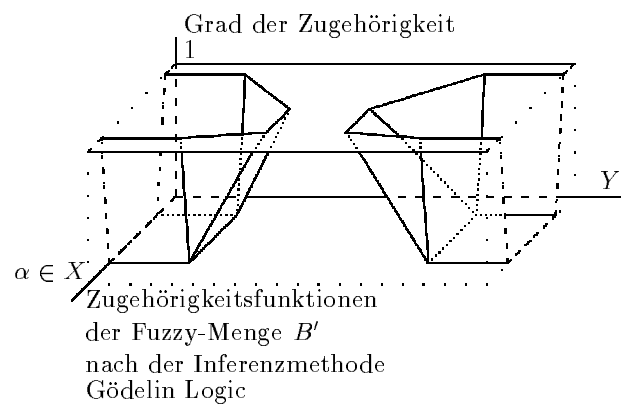
**Abbildung 2.9:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode Arithmetic Rule.



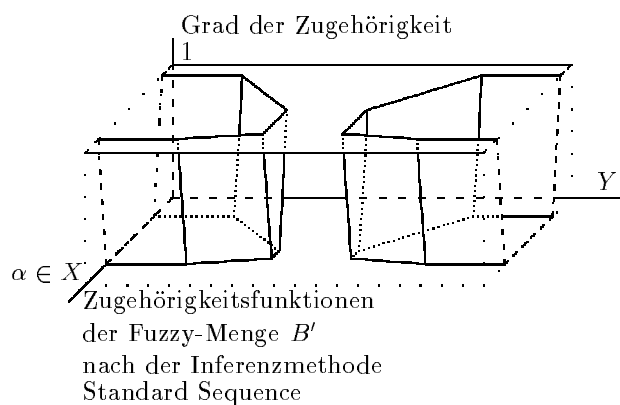
**Abbildung 2.10:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode Maximum Rule.



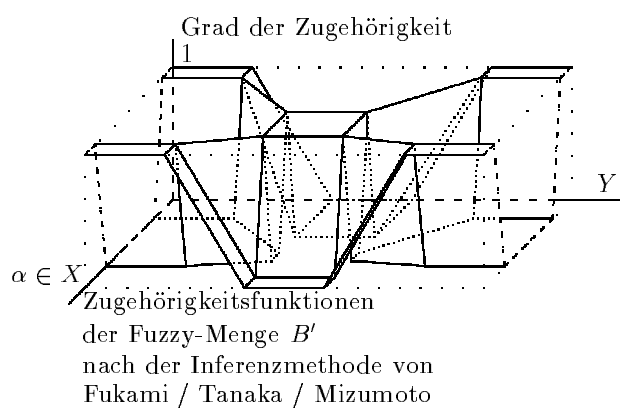
**Abbildung 2.11:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode von Bandler.



**Abbildung 2.12:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode Gödelin Logic.



**Abbildung 2.13:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode Standard Sequence.



**Abbildung 2.14:** Die Fuzzy-Menge  $B'$  nach der Inferenzmethode von Fukami / Tanaka / Mizumoto.

- (e) Die Inferenzmethode von Bandler erzeugt für  $B'$  im Bereich 1, 2 und 11, 12, 13 die Fuzzy-Menge  $B \cup \overline{B}$ .
- (f) Die Inferenzmethoden Bounded Product, Gödelin Logic und von Mamdani / Assilian erzeugen im Bereich 6, 7, 8, 9 die Fuzzy-Menge  $B$  für  $B'$ .
- (g) Die Inferenzmethoden Boolean Implication, Arithmetic Rule, Maximum Rule und von Bandler erzeugen im Bereich 7 die Fuzzy-Menge  $B$  für  $B'$ .
- (h) Die Inferenzmethoden Drastic Produkt, Standard Sequence und von Fukami / Tanaka / Mizumoto erzeugen im Bereich 7 die Fuzzy-Menge  $\mathbb{1}_Y^Z$  mit  $Z = \{y | y \in Y, \mu_B(y) = 1\}$ .
- (i) In allen anderen Bereichen findet ein fließender Übergang der Fuzzy-Menge  $B'$  statt.
- (j) Ist die Fuzzy-Menge  $B$  ein unscharfer numerischer Wert, so ist  $B'$  nach Anwendung der Inferenzmethoden Drastic Produkt, Standard Sequence und von Fukami / Tanaka / Mizumoto im Bereich 7 ein Singleton. In diesem Fall kann nicht die Flächenschwerpunktmethode und nicht die Approximationsmethoden Distanzmaß und das Maß von Heiko Förster angewendet werden.

Die Tabelle 2.2 bietet eine Zusammenstellung der zuvor genannten Eigenschaften in symbolischer Form.

### 2.4.3 Zusammenwirken mehrerer Regeln

Für diesen Vergleich benötigen wir bis zu zwei linguistische Variablen für die Prämisse und eine linguistische Variable für die Konklusion. Seien

$U_1 = (., X_1, \mathcal{L}_1)$ ,  $U_2 = (., X_2, \mathcal{L}_2)$ ,  $V = (., Y, \mathcal{M})$  diese linguistischen Variablen. Seien weiterhin  $(., A_1), (., A_3) \in \mathcal{L}_1$ ,  $(., A_2) \in \mathcal{L}_2$  und  $(., B_1), (., B_2) \in \mathcal{M}$ .

(A) Eine Beziehung

(i): **if  $\tilde{U}_1$  is  $A_1$  and  $\tilde{U}_2$  is  $A_2$  then  $\tilde{V}$  is  $B_1$**

wird zur Berechnung in zwei Beziehungen

(ii): **if  $\tilde{U}_1$  is  $A_1$  then  $\tilde{V}$  is  $B_1$**

(iii): **if  $\tilde{U}_2$  is  $A_2$  then  $\tilde{V}$  is  $B_1$**

Bereich:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Mamdani / Assilian													
Bounded Product													
Drastic Product													
Gödelin Logic													
Standard Sequence													
Boolean Implication													
Arithmetic Rule													
Maximum Rule													
Bandler													
Fukami/Tanaka/Mizumoto													

**Tabelle 2.2:** Das Verhalten der Inferenzmethoden in symbolischer Darstellung. Die Bereiche sind in der Tabelle 2.1 beschrieben. Die gepunktete Linie in den Symbolen entspricht der Fuzzy-Menge  $B$ . Die durchgezogene Linie symbolisiert die Fuzzy-Menge  $B'$ . Liegen durchgezogene Linien vertikal übereinander, so bewegt sich die Fuzzy-Menge  $B'$  innerhalb des Bereichs in diesem Raum. Diese Bewegung kann trotz gleicher Symbole unterschiedlich sein.

geteilt. Die **and**-Verknüpfung aus (i) ist eine einschränkende Verknüpfung, d. h.  $\tilde{U}_1$  **is**  $A_1$  und  $\tilde{U}_2$  **is**  $A_2$  müssen erfüllt sein. Ist ein Teil der Prämisse aus (i) nicht erfüllt, so ist die gesamte Prämisse aus (i) nicht erfüllt und das Ergebnis ist eine Fuzzy-Menge  $B'_1$  aus dem Bereich 1 oder 13. Da ein Teil der Prämisse aus (i) nicht erfüllt ist, ist auch eine Prämisse aus (ii) oder (iii) nicht erfüllt. Eine Konklusion ergibt also als Ergebnis die Fuzzy-Menge  $B'$  aus dem Bereich 1 oder 13. Die Verknüpfung der Ergebnisse aus (ii) und (iii) muß dann auch das Ergebnis aus dem Bereich 1 oder 13 sein.

- (B) Aus (A) und (b) folgt für die Inferenzmethoden Drastic Product, Bounded Product und von Mamdani / Assilian, daß die Ergebnisse der beim **and** in der Prämisse geteilten Beziehungen mit **and** verknüpft werden müssen.
- (C) Für die Inferenzmethoden Gödelin Logic, Standard Sequence, Boolean Implication, Maximum Rule und Arithmetic Rule folgt aus (A) und (c), daß die Ergebnisse der beim **and** geteilten Beziehungen mit **or** verknüpft werden müssen.
- (D) Für die Inferenzmethode von Bandler gilt, daß die Fuzzy-Menge  $B'$  aus dem Bereich 1, 2 und 11, 12, 13 größer gleich den Fuzzy-Mengen  $B'$  aus den anderen Bereichen ist. Somit muß für die Inferenzmethode von Bandler auch das **or** für die Verknüpfung der Ergebnisse der beim **and** in der Prämisse geteilten Beziehungen gewählt werden.
- (E) Für die Inferenzmethode von Fukami / Tanaka / Mizumoto gibt es keine Verknüpfung, die wie bei den anderen Inferenzmethoden die geteilten Beziehungen so verknüpft, daß das gleiche Ergebnis herauskommt, als wenn die Beziehung nicht geteilt worden wäre. Die Ergebnisse dieser Beziehungen werden mit **or** verknüpft, da so das Ergebnis außerhalb der Trägermenge von  $B$  in den Bereichen 1, 2 und 11, 12, 13 nicht beeinflußt wird.
- (F) Eine Beziehung

$$(iv): \quad \text{if } \tilde{U}_1 \text{ is } A_1 \text{ or } \tilde{U}_2 \text{ is } A_2 \text{ then } \tilde{V} \text{ is } B_1$$

wird zur Berechnung in zwei Beziehungen

$$(v): \quad \text{if } \tilde{U}_1 \text{ is } A_1 \text{ then } \tilde{V} \text{ is } B_1$$

$$(vi): \quad \text{if } \tilde{U}_2 \text{ is } A_2 \text{ then } \tilde{V} \text{ is } B_1$$



geteilt. Die **or**-Verknüpfung aus (iv) ist eine erweiternde Verknüpfung, d. h.  $\tilde{U}_1$  **is**  $A_1$  oder  $\tilde{U}_2$  **is**  $A_2$  müssen erfüllt sein. Sind beide Teile der Prämisse aus (iv) nicht erfüllt, so ist die gesamte Prämisse aus (iv) nicht erfüllt und das Ergebnis ist eine Fuzzy-Menge  $B'_1$  aus dem Bereich 1 oder 13. Da beide Teile der Prämisse aus (iv) nicht erfüllt sind, sind auch die Prämissen aus (v) und (vi) nicht erfüllt. Eine Konklusion ergibt also als Ergebnis die Fuzzy-Menge  $B'$  aus dem Bereich 1 oder 13. Die Verknüpfung der Ergebnisse aus (v) und (vi) muß dann auch das Ergebnis aus dem Bereich 1 oder 13 sein.

- (G) Aus (F) und (b) folgt für die Inferenzmethoden Drastic Product, Bounded Product und von Mamdami / Assilian, daß die Ergebnisse der beim **or** geteilten Beziehungen mit **or** verknüpft werden müssen.
- (H) Für die anderen Inferenzmethoden Gödelin Logic, Standard Sequence, Boolean Implication, Maximum Rule, Arithmetic Rule und von Bandler folgt aus (F) und (c), daß die Ergebnisse der beim **or** geteilten Beziehungen mit **and** verknüpft werden müssen.
- (I) Für die Inferenzmethode von Fukami / Tanaka / Mizumoto werden die Ergebnisse der bei **or** in der Prämisse geteilten Beziehungen mit **and** nach der äquivalenten Begründung von (E) verknüpft.
- (J) Existieren zwei Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{(vii):} & \quad \text{if } \tilde{U}_1 \text{ is } A_1 \text{ then } \tilde{V} \text{ is } B_1 \\ \text{(viii):} & \quad \text{if } \tilde{U}_1 \text{ is } A_3 \text{ then } \tilde{V} \text{ is } B_2 , \end{aligned}$$

so müssen auch diese miteinander verknüpft werden. Ist eine Prämisse der beiden Beziehungen nicht erfüllt, so sollte das Ergebnis der Beziehung mit der nicht erfüllten Prämisse nicht das Ergebnis der Beziehung mit der erfüllten Prämisse beeinflussen, soll sich also neutral verhalten.

- (K) Aus (J) und (b) folgt für Beziehungen mit unterschiedlichen Konklusionen, jedoch einer Variablen, für die Inferenzmethoden Bounded Product, Drastic Product und von Mamdami / Assilian, daß die Ergebnisse mit **or** verknüpft werden müssen.
- (L) Für die anderen Inferenzmethoden Gödelin Logic, Standard Sequence, Boolean Implikation, Maximum Rule, Arithmetic Rule und von Bandler und Fukami / Tanaka / Mizumoto folgt aus (J) und (c), daß die Ergebnisse der Beziehungen mit unterschiedlichen Konklusionen über einer Variablen mit **and** verknüpft werden müssen.

- (M) Falls die Prämissen mehrerer Beziehungen mit unterschiedlichen Konklusionen über einer Variablen mehr oder weniger erfüllt sind, so gewichtet die Inferenzmethode Drastic Product mehr als die Inferenzmethode Bounded Produkt und diese mehr als die Inferenzmethode von Mamdami / Assilian die erfüllteren Prämissen stärker.
- (N) Werden für die linguistischen Ausdrücke der linguistischen Variable in den Konklusion Fuzzy-Mengen verwendet, die stark unterschiedliche Kardinalität haben, werden wegen (M) die Inferenzmethoden Drastic Product mehr als Bounded Product im allgemeinen die erwarteteren Ergebnisse liefern als die Inferenzmethode von Mamdami / Assilian.
- (O) Werden für die linguistischen Ausdrücke der linguistischen Variable in den Konklusion Fuzzy-Mengen verwendet, die unscharfe numerische Werte darstellen, sollte den Inferenzmethoden Bounded Product und von Mamdami / Assilian wegen (j) der Vorzug gegenüber der Inferenzmethode Drastic Product gewährt werden.
- (P) Aus (M), (N) und (O) folgt, daß die Inferenzmethode Bounded Product im allgemeinen der Vorzug gegenüber den Inferenzmethoden Drastic Product und von Mamdami / Assilian gewährt werden sollte.
- (Q) Wie (M) gewichteten die Inferenzmethoden Gödelin Logic, Standard Sequence und Arithmetic Rule die erfüllteren Prämissen mehr als die Inferenzmethoden Boolean Implication, Maximum Rule und die Inferenzmethode von Bandler.
- (R) Wie (N) folgt aus (Q), daß die Inferenzmethoden Gödelin Logic, Standard Sequence und Arithmetic Rule im allgemeinen die erwarteteren Ergebnisse liefern werden als die Inferenzmethoden Boolean Implication, Maximum Rule und die Inferenzmethode von Bandler.
- (S) Aus (j) sollten wie in (O) die Inferenzmethode Standard Sequence und die Inferenzmethode von Fukami / Tanaka / Mizumoto nur mit Vorsicht gewählt werden.
- (T) Da in der Regel viele Prämissen von Beziehungen mit unterschiedlichen Konklusionen, jedoch einer linguistischen Variablen, mehr oder weniger erfüllt sein werden, tritt bei den Inferenzmethoden Gödelin Logic, Standard Sequence und der Inferenzmethode von Fukami / Tanaka / Mizumoto folgendes Problem auf: Sind mehrere Prämissen mehr oder weniger erfüllt, haben die Fuzzy-Mengen der linguistischen Ausdrücke aus der linguistischen Variable der Konklusionen in der Regel einen leeren Schnitt der Trägermengen. Da das Ergebnis der Beziehungen eine

Fuzzy-Menge ist, die den oben genannten Schnitt der Trägermengen als Träger hat, ist der Grad der Zugehörigkeit für jedes Element 0.

Dieser Fall tritt nicht bei den Inferenzmethoden Boolean Implication, Maximum Rule, Arithmetic Rule und der von Bandler auf, da wenn eine Prämisse voll erfüllt ist, alle Prämissen der Beziehungen mit anderer Konklusion nicht erfüllt sein sollten.

- (U) Aus (Q), (R), (S) und (T) sollte der Inferenzmethode Arithmetic Rule Vorrang vor den Inferenzmethoden Gödelin Logic, Standard Sequence, Boolean Implication, Maximum Rule, Bandler und Fukami / Tanaka / Mizumoto gewährt werden.
- (V) Die Inferenzmethoden Arithmetic Rule, Boolean Implication, Maximum Rule und Bandler erzeugen bis auf den Bereich 7 immer Fuzzy-Mengen mit einer Zugehörigkeitsfunktion, die in allen Punkten größer 0 ist. Damit ist auch der Schnitt fast immer größer 0 und die Flächenschwerpunktmethod liefert ein stark zur Mitte von  $X$  gerichteten Wert.
- (W) Wegen (V), (U) und (P) dürfte die Inferenzmethode Bounded Product im Allgemeinen die erwarteteren Ergebnisse liefern. Die zu verwendende Inferenzmethode sollte jedoch bei jeder Modellierung neu bestimmt werden.



# Literaturverzeichnis

- (1996). Allgemeine Vorhabenbeschreibung. Ökosystemforschung im Bereich der Bornhöveder Seenkette, Christian-AlbrechtsUniversität zu Kiel, Projektzentrum Ökosystemforschung, Schauenburger Str. 112, 24118 Kiel. Forschungskonzept für die dritte Förderphase.
- (1996). Themenbereich Auswertung. Ökosystemforschung im Bereich der Bornhöveder Seenkette, Christian-AlbrechtsUniversität zu Kiel, Projektzentrum Ökosystemforschung, Schauenburger Str. 112, 24118 Kiel. Forschungskonzept für die dritte Förderphase.
- Bandemer, Hans und Gottwald, Siegfried (1993). *Einführung in Fuzzy-Methoden*. Akademie Verlag, Vierte Auflage. Theorie und Anwendungen unscharfer Mengen.
- Benz, Wilhelm, Heinks, Peter und Starke, Lothar (1980). *Tabellenbuch der Elektronik und Nachrichtentechnik*. Frankfurter Fachverlag, Kohl + Noltemeyer Verlag, Zweite Auflage.
- Binas-Holz, Antje (1996). *Java Referenzhandbuch*. SYBEX, Düsseldorf.
- Bui, Minh Tri (1993). Weiterentwicklung eines Unterstützungssystems zur wissensbasierten Modellierung unter Einsatz der Fuzzy-Set-Theorie. Diplomarbeit, Institut für Informatik und Praktische Mathematik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Cornell, Gray und Horstmann, Cay S. (1996). *JAVA bis ins Detail*. Heise, Hannover. Das Buch für Experten.
- Gosling, James, Joy, Bill und Steele, Guy (1997). *Java<sup>TM</sup>*, Die Sprachspezifikation aus *Java Serie*. Addison-Wesley. Die offizielle Dokumentation von JAVA SOFT.
- Kacprzyk, Janusz (1983). *Wieloetapowe podejmowanie decyzji w warunkach rozmytości*. PWN, Warschau.

- Kruse, Rudolf, Gebhardt, Jörg und Klawonn, Frank (1995). *Fuzzy-Systeme*. Teubner, Stuttgart, Zweite Auflage.
- Leung, K.S. und Lam, W. (1988). Fuzzy Concepts in Expert Systems. *IEEE Computer*, Seite 43–56.
- Direktorium des Ökologie-Zentrums (1997). Ökologie-Zentrum. Direktorium des Ökologie-Zentrums, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Projektzentrum Ökosystemforschung, Schauenburger Str. 112, 24118 Kiel. Broschüre.
- Mizumoto, Masaharu (1988). Fuzzy Controls Under Various Fuzzy Reasoning Methods. *Information Sciences*, (45): Seite 129–151.
- Neubert, Carsten (1995). Weiterentwicklung der Simulationskomponente des Unterstützungssystems FLECO zur fuzzy-wissensbasierten Modellierung. Diplomarbeit, Institut für Informatik und Praktische Mathematik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Nöhr, Peter (1995). Erweiterung des Modellierungssystems FLECO in Richtung Fuzzy-Expertensystem. Diplomarbeit, Institut für Informatik und Praktische Mathematik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Oberschelp, Arnold (1991). Logik für Mathematiker und Informatiker. Vorlesungsskript, Institut für Logik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Ostermann, Klaus (1998). Programmieren mit Swing. *c't*, (18): Seite 168–173. GUI-Entwicklung mit Java.
- Rosenbaum, Gabi und Schölles, Reiner (1991). *Das große Buch zu Turbo Pascal 6.0*. DATA BECKER, Düsseldorf, Zweite Auflage.
- Schepers, M. (1991). Ein Unterstützungssystem zur wissensbasierten Modellierung und Simulation von ökologischen Prozessen. Diplomarbeit, Institut für Informatik und Praktische Mathematik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Sperlbaum, C. (1991). Der Einsatz der Fuzzy-Set-Theorie in der wissensbasierten Modellierung von ökologischen Prozessen. Diplomarbeit, Institut für Informatik und Praktische Mathematik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Tilli, Thomas (1991). *Fuzzy-Logik: Grundlagen, Anwendungen, Hard- und Software*. Franzis, München.

- Wolff von Gudenberg, Jürgen Frhr (1996). *Objektorientiert Programmieren von Anfang an*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, Zweite Auflage. Eine Einführung mit C++.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, (8): Seite 338–353.
- Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I–III. *Information Sciences*, (8, 9): Seite 199–250, 301–375, 43–80.
- Zimmermann, H.-J. (1992). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Zweite Auflage.
- Zimmermann, Hans-Jürgen und von Atrock (Hrsg), Constantin (1994). *Fuzzy Logic, Band 2*. R. Oldenbourg, München, Wien. Anwendungen.